**Министерство образования и науки РФ**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный

университет»

ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

КАФЕДРА АНАЛИЗА ДАННЫХ И ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ Специальность (направление): 38.03.05 – Бизнес-информатика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(бакалаврская работа)

**МЕТОД РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ МЕТРИКИ В ПРОСТРАНСТВЕ КРИТЕРИЕВ**

Работа завершена:

"\_\_\_"\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2018 г. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ А.В.Вяльцева

Работа допущена к защите:

Научный руководитель

д-р физ.-мат. наук, профессор

"\_\_\_"\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2018 г.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ И.Я.Заботин

Заведующий кафедрой

д-р физ.-мат. наук, профессор

"\_\_\_"\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2018 г. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_М.Д.Миссаров

**Казань - 2018**

**Содержание**

[Введение 3](#_Toc514925259)

[Глава 1 Теоретическая часть 5](#_Toc514925260)

[1.1 Метод на основе метрики в пространстве критериев 5](#_Toc514925261)

[1.2 Симплексный метод 7](#_Toc514925262)

[1.3 Метод внешних штрафных функций 10](#_Toc514925263)

[1.4 Метод наискорейшего спуска 12](#_Toc514925264)

[1.5 Метод деления отрезка пополам 13](#_Toc514925265)

[Глава 2 Практическая часть 13](#_Toc514925266)

[2.1 Описание работы программы 13](#_Toc514925267)

[2.2 Численные эксперименты 13](#_Toc514925268)

[2.3 Решение прикладной оптимизационной задачи 17](#_Toc514925269)

[Заключение 20](#_Toc514925270)

[Список используемой литературы 20](#_Toc514925271)

[Приложение. Листинг программы 20](#_Toc514925272)

# Введение

Во многих областях, от промышленного до социального сектора, лица, принимающие решения, сталкиваются с растущей необходимостью учитывать несколько противоречивых целей в процессе своей работы. Выбор оптимальной альтернативы позволяет сэкономить денежные средства и ресурсы. Часто для разрешения такого рода проблем реального мира можно составить математическую модель, представляющую собой задачу многокритериальной оптимизации.

Для решения подобных задач существуют различные методы, которые находят компромиссные решения, учитывая противоречивый характер критериев и степень их важности. В их основе лежит сведение многокритериальной задачи к однокритериальной задаче или последовательности таких задач. К основным подходам к решению многокритериальных задач относят метод последовательных уступок, метод свертки критериев, метод контрольных показателей и др. Данная выпускная квалификационная работа посвящена изучению метода на основе метрики в пространстве критериев или, как его еще называют, метода идеальной точки.

Целью выпускной работы является реализация программы, позволяющей находить решение многокритериальной задачи с линейными целевыми функциями и ограничениями, применяя один вариант метода на основе метрики в пространстве критериев, и численное исследование этого метода. В качестве вспомогательного метода решения соответствующей однокритериальной задачи используется метод внешних штрафных функций. Для достижения поставленной цели необходимо было выполнить следующие работы:

1. Изучить подход к решению многокритериальных на основе метрики в пространстве критериев и метод внешних штрафных функций;
2. Программно реализовать исследуемый метод и спроектировать удобный пользовательский интерфейс;
3. Провести серию численных экспериментов для подтверждения работоспособности программы и проанализировать результаты;
4. Решить прикладную задачу многокритериальной оптимизации.

Для программной реализации метода используется язык C# и технология Windows Forms для создания пользовательского интерфейса.

Выпускная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка используемой литературы и приложения.

# Глава 1 Теоретическая часть

# 1.1 Метод на основе метрики в пространстве критериев

Пусть имеются частные оптимизационные критерии и множество ограничений . Каждый из частных критериев требуется максимизировать на допустимом множестве (задачи минимизации для упрощения записи сводятся к задачам максимизации).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1) |

Задача (1) является задачей многокритериальной оптимизации.

Положим . Тогда называют множеством абсолютных решений задачи многокритериальной оптимизации. Если , то в качестве решения задачи (1) естественно взять . Однако, как правило, . В этом случае в качестве решения многокритериальной задачи требуется найти такую точку , которая в определенном смысле была бы близка к каждому из множеств или значения близки к для .

Перейдем к описанию метода на основе введения метрики в пространстве критериев.

Рассматривается m-мерное пространство оптимизационных критериев. Для вектор задает точку в этом пространстве.

Найдем вектор в пространстве критериев, состоящий из максимальных значений всех целевых функций, который назовем «идеальной» точкой:

.

В допустимом множестве практически никогда нет такой точки , что = . Если бы она была, то она принадлежала бы множеству и являлась бы решением задачи (1). Метод на основе метрики в пространстве критериев предлагает найти такую точку , что расстояние от до было бы минимальным. Для вычисления этого расстояния вводится некоторая метрика в m-мерном пространстве критериев. Приведем примеры некоторых часто используемых мер расстояния. Манхэттенская метрика имеет следующий вид:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2) |

Наиболее часто применяется евклидова метрика:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3) |

Взвешенное евклидово расстояние используется, когда необходимо учитывать степень важности критериев. Каждому критерию приписывается некоторый вес

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4) |

Таким образом, после выбора метрики в качестве исходной принимают задачу:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5) |

В данной выпускной работе рассматривается случай, когда все целевые функции и ограничения , задающие допустимое множество X, являются линейными функциями, и X – выпуклый многогранник. В качестве меры расстояния используется евклидово расстояние (3).

Целевые функции задаются следующим образом:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6) |

А допустимая область:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7) |

где

Оптимальное решение задачи с целевой функции и задачи с целевой функцией в виде ее подкоренного выражения совпадают, поэтому для упрощения расчетов в качестве решаемой задачи можно взять последнюю. Тогда целевая функция решаемой задачи будет являться выпуклой и гладкой и (8) будет представлять собой задачу выпуклой оптимизации.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (8) |

# 1.2 Симплексный метод

Для того, чтобы сформулировать задачу однокритериальной оптимизации (8), рассмотренной в предыдущем разделе, необходимо найти вектор оптимальных значений . Учитывая линейность частных критериев и функций, задающих ограничения, необходимо решить m задач линейного программирования. Для этого будем применять прямой симплексный метод с использованием метода дополнительных переменных и метода искусственного базиса. Для каждого i-го критерия необходимо решить задачу:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (9) |

Если изначально задача была на нахождение минимума функции, то легко перейти к задаче максимизации: .

Симплекс-метод – это вычислительная процедура, которая основана на принципе последовательного улучшения планов - целенаправленном переборе допустимых базисов и соответствующих им опорных планов задачи, начиная с любого опорного плана. При переходе к следующему опорному плану значение целевой функции не убывает. Теоретически доказано, что если задача является невырожденной и оптимальное решение существует, то оно будет найдено за конечное число шагов.

Симплекс-метод применяется для задач, записанных в канонической форме:

1. Основные ограничения имеют вид равенств;
2. Для всех переменных задачи присутствуют условия их неотрицательности;
3. Свободные члены неотрицательны.

Метод дополнительных переменных позволяет с помощью введения так называемых дополнительных переменных перейти от исходной задачи с ограничениями-неравенствами к новой задаче с ограничениями-равенствами. Они прибавляются к правым частям уравнений, если неравенство имело знак «≤», и вводятся в начальный базис, или отнимаются в случае «≥». Решение новой задачи дает решение исходной. Если все ограничения имели вид «≤», то после применения метода будет получен начальный базис.

Если для некоторого i-го уравнения свободный член окажется меньше нуля, обе его части умножают на -1.

Если в задаче есть произвольных переменные, то они заменяются разностью двух других неотрицательных переменных. Для произвольной переменной , где .

Если начальный базис не был построен после введения дополнительных переменных используют метод искусственного базиса. Искусственные переменные вводятся в целевую функцию со знаком «-» с большими положительными коэффициентами M, имеющими смысл «штрафов» за ввод искусственных переменных. Если в оптимальном плане М-задачи не присутствуют искусственные переменные, это решение является оптимальным решением исходной задачи. Если же в оптимальном плане M-задачи хотя бы одна искусственная переменная будет отлична от нуля, то система ограничений исходной задачи линейного программирования несовместна и задача неразрешима.

Перейдем к описанию симплексного метода.

Пусть . Базис представляет собой линейно независимую подсистему системы векторов-столбцов матрицы . Обозначим через – множество базисных значений индекса j, – базисная подматрица . Разложим векторы-столбцы по этому базису:

Вычислим значения , называемые оценками:

Введем так называемую симплексную таблицу , которая представляет собой матрицу , однозначно определяемую по некоторому базису .

,

где - вектор, составленный из базисных координат вектора), - вектор, составленный из базисных координат вектора

Симплекс-таблица содержит всю необходимую информацию для осуществления итерации симплекс-метода.

Сформулируем алгоритм метода:

1. Строится исходная симплексная таблица.
2. Проверяется критерий оптимальности: Если данное условие выполняется, то вектор , в котором и – решение задачи. Конец алгоритма.
3. Выбирается ведущий столбец k из условия: .
4. Строится .
5. Если , то задача не имеет решения в силу неограниченности целевой функции на допустимой области. Конец алгоритма.
6. Выбирается номер ведущей строки такой, что
7. Строится новый базис , где .
8. Пересчитывается симплексная таблица. Элементы , j=1...n ведущей строки делятся на ведущий элемент . Далее, осуществляя гауссовские преобразования, добиваются получения во всех остальных строках ведущего -ого столбца нулей. Рассчитываются новые оценки и . Возвращаемся к шагу 1.

# 1.3 Метод внешних штрафных функций

После нахождения вектора можно решать задачу однокритериальную оптимизации (8). Для этого применим один из методов внешних штрафных функций.

Методы штрафных функций относят к непрямым методам решения задач нелинейного программирования. В этой группе методов решение задачи условной оптимизации сводится к решению последовательности задач на безусловный экстремум. Методы внешних штрафных функций могут применяться для решения задач оптимизации как с ограничениями-неравенствами, так и с ограничениями-равенствами.

Опишем метод штрафных функций, используемый в данной работе. Основная идея метода заключается в сведении исходной задачи

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (10) |

к последовательности задач безусловной минимизации

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (11) |

где – штрафная функция множества X.

Вспомогательная функция подбирается так, что она совпадает с на множестве X и быстро возрастает вне его. Можно ожидать, что ее быстрый рост вне X приведет к тому, что и при больших k нижняя грань этой функции на будет достигаться в точках, близких к множеству X, и решение поставленной задачи безусловной минимизации (11) приблизится к решению исходной задачи (10).

Последовательность функций , определенных и неотрицательных на , называется штрафной функцией множества X на множестве , если

Преобразуем множество (7) к следующему виду, перенеся свободные члены в правую часть уравнений и неравенств:

Выберем в качестве штрафной функции

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (12) |

Так как все функции в рассматриваемом случае являются линейными, то и, соответственно, являются выпуклыми и непрерывно дифференцируемыми.

Рассматривается последовательность задач (11) со штрафными функциями (12). На шаге k с помощью какого-либо метода минимизации находят точку : , где – некоторая заданная последовательность, , k = 0,1,..., На следующем -м шаге точка используется в качестве начальной в используемом методе безусловной оптимизации. В качестве критерия остановки принимается .

К преимуществам метода штрафных функций относятся его простота и тот факт, что поиск минимума вспомогательной функции можно начинать из произвольной точки, т.е. нет необходимости искать точку из , как, например, в методах барьерных функций.

Основной недостаток метода – сложность функции , которая часто является овражной, степень ее овражности увеличивается с увеличением коэффициента . Сходимость многих методов безусловной минимизации для овражных функций очень медленная. Кроме того, промежуточные приближения не являются допустимыми решениями задачи (10), оптимум аппроксимируется извне области .

# 1.4 Метод наискорейшего спуска

Для решения последовательности задач (11) будем использовать метод наискорейшего спуска. Он применим к этим задачам, так как являются гладкими функциями, как было указано ранее.

Группа градиентных методов относится к методам первого порядка, т.е. на каждой итерации используются первые частные производные оптимизируемой функции . Для построения последовательности приближений в качестве направлений итерационного перехода выбираются антиградиенты функции, вычисленные в точках , т.е.

где – шаг градиентного метода.

Метод сходится, если или . При произвольном выборе шага, например, постоянного, последовательность может оказаться неминимизирующей и метод в этом случае расходится.

Метод наискорейшего спуска использует полный шаг при осуществлении переходов. Находится такой шаговый множитель, что выполняется:

Формулы для частных производных можно получить в явном виде лишь в том случае, когда целевая функция задана аналитически.

# 1.5 Метод деления отрезка пополам

# Глава 2 Практическая часть

# 2.1 Описание работы программы

# 2.2 Численные эксперименты

Пример 1.

Найдем вектор оптимальных значений . Решим задачу линейного программирования с первым критерием.

Приведем задачу в каноническую форму, введя дополнительные переменные.

Построим симплексную таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| БАЗИС | CB | XB | -1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| 3 | 0 | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | -2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
|  |  | 0 | 1 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Найдена отрицательная оценка . Ведущим является второй столбец. . Найдем : min{1,3}=1. Первая строка - ведущая. Во множество базисных индексов B вместо 3 войдет 2. Пересчитаем симплексную таблицу с помощью правила прямоугольника.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| БАЗИС | CB | XB | -1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| 2 | 3 | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 2 | -1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 2 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |
|  |  | 0 | -2 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 |

Найдена отрицательная оценка . Ведущим является первый столбец. . Найдем : min{4,2}=2. Четвертая строка - ведущая. Во множество базисных индексов B вместо 6 войдет 1. Пересчитаем симплексную таблицу с помощью правила прямоугольника.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| БАЗИС | CB | XB | -1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| 2 | 3 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 |
| 1 | -1 | 2 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |
|  |  | 7 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |

Нет отрицательных оценок. Оптимальный план: (2;3), значение целевой функции - 7.

Решим задачу линейного программирования со вторым критерием.

Приведем задачу в каноническую форму, введя дополнительные переменные.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| БАЗИС | CB | XB | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| 3 | 0 | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | -2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
|  |  | 0 | -4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Найдена отрицательная оценка . Ведущим является первый столбец. . Найдем : min{0,4}=0. Вторая строка - ведущая. Во множество базисных индексов B вместо 4 войдет 1. Пересчитаем симплексную таблицу с помощью правила прямоугольника.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| БАЗИС | CB | XB | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | -2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 4 | 0 | 2 | 0 | -1 | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
|  |  | 0 | 0 | -7 | 0 | 4 | 0 | 0 |

Найдена отрицательная оценка . Ведущим является второй столбец. . Найдем : min{2,3}=2. Третья строка - ведущая. Во множество базисных индексов B вместо 5 войдет 2. Пересчитаем симплексную таблицу с помощью правила прямоугольника.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| БАЗИС | CB | XB | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| 3 | 0 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0.5 | 0.5 | 0 |
| 1 | 0 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | -0.5 | 0.5 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | -0.5 | 1 |
|  |  | 14 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 3.5 | 0 |

Нет отрицательных оценок. Оптимальный план: (4;2), значение целевой функции - 14.

Вектор найден.

Таким образом, задача однокритериальной оптимизации (8) имеет вид:

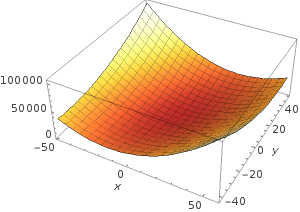


Рисунок 1 График функции

# C:\Users\vjalc\Desktop\WolframAlpha--RegionPlot___x___y____1_______x_2y____0______y____3______x____4____x__0__5____y__0__5____Inequality_plot____2018_05_27_05_21.png

# Рисунок 2 Область ограничений X

Точка глобального минимума (4.4545; 3.8181), для которой лежит вне области X, решение задачи условной минимизации будет достигаться на границе X.

Применим метод штрафных функций и распишем одну его итерацию. Пусть .

В методе наискорейшего спуска положим начальную точку (0;0), .

1.,

2.,

3. ,

4. ,

5. ,

6. ,

7. ,

8. ,

9. ,

,

11. ,

20 итераций метода штрафных функций:

4,3802111955; 3,6897952161

4,1430508584; 3,2860458921

4,0859984777; 3,1808443342

4,0610018079; 3,1324224204

4,0471133378; 3,1045412692

4,0383104431; 3,0863831407

4,0322514752; 3,0736124783

4,0278320707; 3,0641431508

4,0246361223; 3,0567745906

4,0219134466; 3,0509649875

4,0197770091; 3,0462662283

4,018001406; 3,042333654

4,0165177722; 3,0390190341

4,0152655747; 3,0362001948

4,0141834491; 3,0337475883

4,0132529345; 3,0316268991

4,0124284699; 3,0297373941

4,0117052921; 3,0280731237

4,0110590783; 3,0265792735

4,0104769225; 3,0252286772

…

Получим

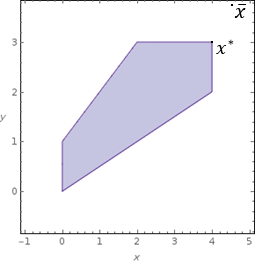
****

Рисунок 3 Решение , соответствующее идеальной точке , и найденное решение

Расстояние между идеальной точкой и точкой, соответствующей полученному решению, :

# 2.3 Решение прикладной оптимизационной задачи

# Заключение

# Список используемой литературы

1. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач – Москва : Наука, 1988. – 552 с
2. Кашина О.А., Кораблёв А.И. Методы оптимизации. Часть II. Численные методы решения экстремальных задач, Казань, КГУ, 2011. - 144 с.

# Приложение. Листинг программы